Ueber die verschiedene Darstellung des Restes in der Reihe von Lagrange.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Rostock

von

Ernst Buchholz

aus Norden.

MINDEN.
Gedruckt bei J. C. C. Bruns.
1876.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0123

Es seien $f(z)$ und $\varphi(z)$ Functionen von z, die so beschaffen sind, dass sie innerhalb und auf der Begrenzung eines Kreises, der um den Punkt C, für welchen mod $\varphi(z)$ verschwindet, als Mittelpunkt beschrieben ist, endlich, eindeutig und stetig bleiben. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass die Derivirte von $\varphi(z)$ innerhalb des so bestimmten Gebietes nicht Null wird. Bezeichnet dann Γ irgend einen innerhalb desselben liegenden Punkt, dessen complexen Werth wir mit γ ausdrücken wollen, so ist der Ausdruck

$$\frac{f(z) - f(\gamma)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}$$

in dem ganzen beregten Gebiet und auf dessen Begrenzung eine eindeutige, endliche und stetige Function von z, die für $z = \gamma$ in die endliche Grösse $\frac{f'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}$ übergeht. Denn $\varphi'(\gamma)$ kann der Voraussetzung nach nicht verschwinden, und weder $\varphi'(\gamma)$ noch $f'(\gamma)$ können unendlich werden, da die Derivirte einer Function, die in einem Gebiet endlich, eindeutig und stetig ist, gleichfalls in demselben Gebiet endlich, eindeutig und stetig bleibt. (Durège, Functionen theorie § 24). Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\int \frac{f(z) - f(\gamma)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz$$

auf der Begrenzung des genannten Gebiets erstreckt gleich Null. Hieraus folgt, dass

$$f(\gamma) \int \frac{dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \int \frac{f(z)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz$$

woraus

$$f(\gamma) = \frac{\int \frac{f(z)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz}{\int \frac{dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}}$$

Nun ist $\int \frac{dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \frac{1}{\varphi'(\gamma)} \int \frac{dz}{z - \gamma} = \frac{2\pi i}{\varphi'(\gamma)}$

wo i (nach der gewöhnlichen Bezeichnung) $= \sqrt{-1}$ ist. (Durège a. a. O. § 20), folglich:

$$f(\gamma) = \frac{\varphi'(\gamma)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} dz$$

Nun ist $\frac{1}{\varphi(z) - \varphi\gamma} = \frac{1}{\varphi(z)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}}$

Da nun mod $\varphi(\gamma) <$ mod $\varphi(z)$ nach der Voraussetzung ist, so kann ich den Ausdruck $\frac{1}{1 - \frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}}$ in die convergirende Reihe entwickeln:

$$1 + \frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)} + \left(\frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(\gamma)}{\varphi(z)}\right)^3 + \ldots\ldots$$

Also ist

$$\int \frac{f(z)\ dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \int \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz + \varphi(\gamma \int \frac{f(z)}{\varphi(z)^2} dz +$$

$$\varphi(\gamma)^2 \int \frac{F(z)}{\varphi(z)^3} dz + \ldots\ldots$$

Oder da $\int \frac{f(z)\ dz}{\varphi(z) - \varphi(\gamma)} = \frac{2\pi i}{\varphi'(\gamma)} f(\gamma)$

$$f(\gamma) = \frac{\varphi'(\gamma)}{2\pi i}\left\{\int \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz + \varphi(\gamma) \int \frac{f(z)}{\varphi(z)^2} dz + \right.$$

$$\left. \varphi(\gamma)^2 \int \frac{f(z)\ dz}{\varphi(z)^3} + \ldots\ldots\right\}$$

Schreibe ich statt $f(\gamma)$, welches eine ganz beliebige Function von γ ist $F'(\gamma)$ und integrire die vorige Gleichung zwischen den Grenzen γ und c, (wo c den complexen Werth des Punctes c darstellt, für welchen, wie wir vorausgesetzt haben, mod $\varphi(z)$ verschwindet), so erhalte ich:

$$(I)\ F(\gamma) = F(c) + \varphi(\gamma)\ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z)}{\varphi(z)} dz +$$

$$\frac{\varphi(\gamma)^2}{1.2} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z)\ dz}{\varphi(z)^2} + \frac{\varphi(\gamma)^3}{3} \frac{1}{.2\pi i} \int \frac{F'(z)}{\varphi(z)^3} dz + \ldots.$$

Ist nun $f(z)$ eine Function, die innerhalb eines bestimmten Gebiets, in dem $F(z)$ endlich, eindeutig und stetig ist, gleichfalls eindeutig, endlich und stetig ist und nicht verschwindet, ist ferner Y ein in demselben gelegener Punct, zu dem der complexe Werth y gehört, so erfüllt offenbar die Function $\frac{z - y}{f(z)} = x$ die Bedingungen, die an $\varphi(z)$ gestellt waren. Sie verschwindet nämlich innerhalb des begrenzten Gebiets nur in einem Puncte und ist überall in demselben eindeutig, stetig und endlich. Folglich kann ich in (I)

$\varphi(z)$ durch $\frac{z-y}{f(z)}$ ersetzen. Schreibe ich dann ξ statt γ und beachte, dass dem Punct c der Function $\varphi(z)$ der Punct y der Function $\frac{z-y}{f(z)}$ entspricht, so ist:

$$(II)\quad F(\xi) = F(y) + \frac{\xi - y}{f(\xi)} \frac{1}{.\,2\,\pi\,i} \int \frac{F'(z)\,f(z)\,dz}{z-y}$$
$$+ \left(\frac{\xi - y}{f(\xi)}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\,\pi\,i} \int \frac{F'(z)\,f(z)^2\,dz}{(z-y)^2}$$
$$+ \left(\frac{\xi - y}{f(\xi)}\right)^3 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\,\pi\,i} \int \frac{F(z)\,f(z)^3}{(z-y)^3}\,dz + \ldots\ldots$$

Da die Integrationen in dieser Gleichung sich auf die Begrenzung eines Kreises erstrecken, der um den Punct Y als Mittelpunct beschrieben ist und alle Unstetigkeits- und Unendlichkeitspuncte von F (z) und $\frac{z-y}{f(z)}$ ausschliesst, so ist (Durège a. a. O. § 24).

$$\int \frac{F'(z)\,f(z)}{z-y}\,dz = 2\,\pi\,i\,F'(y)\,f(y)$$

ferner

$$\int \frac{F'(z)\,f(z)^k\,dz}{(z-y)^k} = \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \int \frac{F'(z)\,f(z)^k\,dz}{(k-1)!\,(z-y)}$$
$$= \frac{2\,\pi\,i}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left\{F'(y)\,f(y)^k\right\}.$$

wo $(k-1)! = 1.\,2.\,3.\ldots(k-2)\,(k-1)$ ist.

Setzt man die so gefundenen Werthe in (II) ein und nimmt an, dass für $z = \xi\,x$ in ξ übergeht, so erhält man die Reihe, die den Namen von Lagrange führt:

$$(III)\quad F(\xi) = F(y) + \xi\,F'(y)\,f(y) + \frac{\xi^2}{1.\,2} \frac{d}{dy} \left\{F'(y)\,f(y)^2\right\}$$
$$+ \frac{\xi^3}{1.2.3} \frac{d^2}{dy^2} \left\{F'(y)\,f(y)^3\right\} + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^n}{dy^{n-1}} \left|F'(y)\,f(y)^n\right| + \ldots\ldots$$

Schreibt man die Gleichung $\frac{\xi - y}{f(\xi)} = \xi$ in der Form $\xi\,f(\xi) - \xi + y = 0$ und betrachtet ξ und y als reelle oder imaginäre Constanten, so ist also durch diese Reihe das Problem gelöst, eine Wurzel (oder irgend eine Function

derselben) der Gleichung $\xi\ f\ (\xi) - \xi + y = o$ durch eine nach ganzen, positiven Potenzen von ξ fortschreitende Reihe auszudrücken. Dies bleibt jedoch nur so lange richtig, als dieselbe convergirt. Mit den Bedingungen dafür haben sich seit den Zeiten von Lagrange Männer wie Cauchy, Laplace, Puiseux u. A. beschäftigt. Der Zweck unserer Untersuchung wird sein, zu zeigen, wie man diese Betrachtungen vermeiden kann, wenn man die Reihe nicht ins Unendliche fortsetzt, sondern bei einem gewissen Gliede abbricht und den Rest durch einen geschlossenen Ausdruck darstellt. Wir gehn zu diesem Zweck von der identischen Gleichung aus:

$$\varphi\ (\xi) - \varphi\ (o) = \int_o^{\xi} \varphi'\ (\xi - x)\ d\ x.$$

Entwickelt man die rechte Seite derselben durch partielle Integration, so erhält man, wie in der Analysis gezeigt wird, die Reihe von Maclaurin in folgender Form:

$$(IV)\ \varphi\ (\xi) = \varphi\ (o) + \xi\ \varphi'\ (o) + \frac{\xi^2}{1.2}\ \varphi^{(2)}\ (o) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\xi^n}{n!}\ \varphi^{(n)}\ (o) + \frac{1}{n!} \int_o^{\xi} x^n\ \varphi^{(n+1)}\ (\xi - x)\ d\ x$$

Die Function $\varphi\ (x)$ wird dabei ebenso wie ihre Ableitungen bis zur $(n + 1)$sten als eindeutig, stetig und endlich innerhalb der Grenzen $x = \xi$ und $x = o$ vorausgesetzt. Bestimmen wir nun x aus der Gleichung $x\ f\ (z) - z + y = o$, worin z eine Function der unabhängigen Veränderlichen x und y ist und setzen fest, dass dem Werth $x = o$ der Werth $z = y$ und dem Werth $x = \xi$ der Werth $z = \xi$ entsprechen soll, so ist, wenn wir $\varphi\ (\xi) = \varphi\left(\frac{\xi - y}{f\ (\xi)}\right)$ kürzer mit $F\ (\xi)$ bezeichnen, $\varphi\ (o) = F\ (y)$. Um die Coefficienten der ξ zu erhalten ist es nöthig, einige Formeln zu entwickeln, die der Gleichung $z = x\ f\ (z) + y$ eigenthümlich sind. Differenziren wir dieselbe das eine Mal partiell nach x, das andere Mal partiell nach y, so erhalten wir:

$$\frac{d\ z}{d\ x} = f\ (z) + x\ f'\ (z)\ \frac{d\ z}{d\ x}$$

$$\text{und}\quad \frac{d\ z}{d\ y} = 1 + x\ f'\ (z)\ \frac{d\ z}{d\ y}$$

Hieraus erhalten wir, indem wir die Glieder, die mit $\frac{d\ z}{d\ x}$ einerseits, mit

$\frac{d\,z}{d\,y}$ andererseits multiplicirt sind, auf eine Seite bringen und beide Gleichungen durch einander dividiren,

$$\frac{d\,z}{d\,x} = f\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}$$

Mit Benutzung dieser Formel ist:

$$\frac{d\,F\,(z)}{d\,x} = F'\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,x} = F'\,(z)\;f\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,y} = f\,(z)\,\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}$$

$$\frac{d^2\,F\,(z)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,x}\left\{ f\,(z)\,\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}\right\}$$

Da nun $f\,(z)\,\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}$ nichts anderes ist als $f\,(z)\,F'\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}$ d. h. eine Function von z multiplicirt mit $\frac{d\,z}{d\,y}$, so kann ich dieselbe betrachten als den Differentialquotienten einer anderen Function von z, H (z), so dass also ist;

$$\frac{d\,H\,(z)}{d\,z}\,\frac{d\,z}{d\,y} = f\,(z)\,F'\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}.$$

$$\text{oder } \frac{d\,H\,(z)}{d\,y} = f\,(z)\,F'\,(z)\,\frac{d\,z}{d\,y}.$$

folglich

$$\frac{d^2\,F\,(z)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,x}\left\{\frac{d\,H\,(z)}{d\,y}\right\}$$

Nun kann ich die Reihenfolge der Differentiationen vertauschen, folglich ist:

$$\frac{d}{d\,x}\left\{\frac{d\,H\,(z)}{d\,y}\right\} = \frac{d}{d\,y}\left\{\frac{d\,H\,(z)}{d\,x}\right\} =$$

$$\frac{d}{d\,y}\left\{\frac{d\,H\,(z)}{d\,y}\,f\,(z)\right\} = \frac{d}{d\,y}\left\{f\,(z)^2\,\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}\right\}$$

folglich

$$\frac{d^2\,F\,(z)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,y}\left\{f\,(z)^2\,\frac{d\,F\,z}{d\,y}\right\}$$

Ebenso finde ich

$$\frac{d^3\,F\,(z)}{d\,x^3} = \frac{d^2}{d\,y^2}\left\{f\,(z)^3\,\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}\right\}.$$

Um die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu beweisen, nehmen wir an, lass die Gleichung richtig sei:

$$(V)\quad \frac{d^n F(z)}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left| f(z)^n \frac{dF(z)}{dy} \right|$$

Kann ich beweisen, dass auch

$$\frac{d^{n+1} F(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^n}{dy^n} \left| f(z)^{n+1} \frac{dF(z)}{dy} \right|$$

ist, so ist offenbar die Formel für jedes beliebige n gültig.

Differenzire ich nun (V) nach x partiell, so erhalte ich

$$\frac{d^{n+1} F(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left| \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left[f(z)^n \frac{dF(z)}{dy} \right] \right|$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left| \frac{d}{dx} \left[f(z)^n \frac{dF(z)}{dy} \right] \right|$$

Da nun $f(z)^n \frac{dF(z)}{dy}$ identisch ist mit $f(z)^n F'(z) \frac{dz}{dy}$ d. h. einer Function von z multiplicirt mit $\frac{dz}{dy}$, so kann ich wie oben setzen:

$$\frac{dG(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = f(z)^n \frac{dF(z)}{dz} \frac{dz}{dy}$$

$$\frac{dG(z)}{dy} = f(z)^n \frac{dF(z).}{dy}$$

Nun ist $\frac{d}{dx} \left| \frac{dG(z)}{dy} \right| = \frac{d}{dy} \left| \frac{dG(z)}{dx} \right| =$

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{dG(z)}{dy} f(z) \right| = \frac{d}{dy} \left| f(z)^{n+1} \frac{dF(z)}{dy} \right\}$$

also:

$$\frac{d^{n+1} F(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left[\frac{d}{dy} \left| f(z)^{n+1} \frac{dF(z)}{dy} \right| \right]$$

$$= \frac{d^n}{dy^n} \left| f(z)^{n+1} \frac{dF(z)}{dy} \right| .$$

Wir haben also bewiesen, dass die Formel allgemein gültig ist. Setzen wir in derselben $x = 0$, so geht rechts unmittelbar z in y über, weil die Glieder, welche von x abhängen, getrennt werden können und zugleich mit dieser Variabeln verschwinden. Wir erhalten also zur Bestimmung der Coef ficienten in der Reihe (IV):

$$\varphi(0) = F(y).$$

$$\varphi^{(3)}(0) = \left[\frac{d^n F(z)}{dx^n} \right]_{x=0} =$$

$$\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left| f(y)^n F'(y) \right|$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi - x) - d^{n-1}\frac{\varphi(\xi - x)}{d x^{n+1}}$$

$$= \frac{d^n}{d y^n}\left| f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y}\right|,$$

wo der Werth von z bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\text{(VI)} \quad z = y + (\xi - x) f(z)$$

Setzen wir die so erhaltenen Werthe in (IV) ein, so ist:

$$\text{(VII)} \quad F(\xi) = F(y) + \xi f(y) F'(y) + \frac{\xi^2}{1.2.}\frac{d}{d y}\left| F'(y) f(y)^2\right|$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\xi^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d y^{n-1}}\left| f(y)^n F(y)\right| + R$$

$$R = \frac{1}{n!}\int_0^{\xi} x^n \frac{d^n}{d y^n}\left\{ f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y}\right\} d x$$

Hieraus lässt sich leicht der von Popoff in den Comptes rendus de l'Acad. d. sc. de Paris (Tome 53) gegebene Rest ableiten.

Zu diesem Zweck beachten wir, dass

$$\int_0^{\xi} x^n \frac{d^n}{d y^n}\left\{ f(z)^{n+1}\frac{d F(z)}{d y}\right| d x$$

$$= \frac{d^n}{d y^n}\int_0^{\xi} x^n f(z)^{n+\mu}\frac{d F(z)}{d y}\, d x \text{ ist, da y von x völlig unab-}$$

hängig ist und hier also eine nfache Differentiation nach einem Parameter Statt hat.

Ferner finden wir aus (VI.):

$$x = \frac{y - z + \xi f(z)}{f(z)}$$

Differenzirt man diese Gleichung nach x und beachtet, dass z nur von x, nicht von ξ abhängt, so ist:

$$f(z)\, d x = -d z\left[1 + \frac{y - z}{f(z)} f'(z)\right].$$

Aus (VI) folgt ferner:

$$\frac{d z}{d y} = \frac{1}{1 + (x - \xi) f'(z)} = \frac{f(z)}{f(z) + (y - z) f'(z)}$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Restform ein und beachten, dass $z = y + \xi f(z)$ für $x = 0$ und $z = y$ für $x = \xi$, so erhalten wir:

$$R = \frac{d^n}{dy^n} \int_y^{\xi f(z) + y = z} \frac{(\xi f(z) + y - z)^n}{1.2.\ldots.n} F'(z)\, dz.$$

Dies ist die von Popoff gegebene Form des Restes.

Eine andere, sehr einfache Darstellung des Restes hat Herr Professor Schering neuerdings gegeben. Er geht von der identischen Gleichung aus:

$$\text{(VIII)} \quad \frac{1}{n!} \frac{d}{dx} \left\{ (\xi - x)^n \frac{d^{n+\alpha}}{dy^{n+\alpha}} \right\} G(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big\} =$$

$$- \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n+\alpha}}{dy^{n+\alpha}} \Big\} G(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big\} +$$

$$\frac{(\xi - x)^n}{n!} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^{n+\alpha}}{dy^{n+\alpha}} \right| G(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big| \Big\},$$

deren rechte Seite erhalten wird, indem man die linkerseits angedeutete Differentiation ausführt, α ist eine ganze positive oder negative Zahl, die kleiner als n ist. Wir nehmen an, dass z aus der Gleichung $x f(z) - z + y = 0$ bestimmt wird, und dass die obigen Voraussetzungen in Betreff derselben, dass nämlich $z = y$ für $x = 0$ und $z = \zeta$ für $\alpha = \xi$ werden soll, hier gleichfalls stattfinden. Es hat hier also auch die Gleichung Gültigkeit:

$$\frac{dz}{dx} = f(z) \frac{dz}{dy}.$$

Ebenso ist, wie bewiesen wurde:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^{n+\alpha}}{dy^{n+\alpha}} \right\} G(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big| = \frac{d^{n+\alpha+1}}{dy^{n+\alpha+1}} \Big| G(z) f(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big|$$

folglich erhalten wir aus (VIII):

$$\frac{1}{n!} \frac{d}{dx} \left\{ (\xi - x)^n \frac{d^{n+\alpha}}{dy^{n+\alpha}} \right| G(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big| \Big\}$$

$$= - \frac{(\xi - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n+\alpha}}{dy^{n+\alpha}} \Big\} G(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big\}$$

$$+ \frac{(\xi - x)^n}{n!} \frac{d^{n+\alpha+1}}{dy^{n+\alpha+1}} \Big\} G(z) f(z) \frac{dF(z)}{dy} \Big\}.$$

Specialisiren wir jetzt α und $G(z)$ dahin, dass $\alpha = -1$ und $G(z) = f(z)^n$ sein soll, multipliciren ferner die letzte Gleichung mit dx und integriren zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \xi$, so erhalten wir:

$$(IX^{a}) \quad \frac{-\xi^{n}}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left\{f(y)^{n}F'(y)\right\} = -\int_{0}^{\xi}\frac{(\xi-x)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left\{f(z)\frac{^{n}d\,Fz}{dy}\right\}dx$$

$$+\int_{0}^{\xi}\frac{(\xi-x)^{n}}{n!}\frac{d^{n}}{dy^{n}}\left|f(z)^{n+1}\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}\right|dx$$

Der Kürze halber schreiben wir diese Gleichung:

$$(IX^{b}) \quad -B_{n} = -\int_{0}^{\xi}A_{n-1}\,dx + \int_{0}^{\xi}A_{n}\,dx$$

wo also

$$B_{n} = \frac{\xi^{n}}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left|f(y)^{n}F'(y)\right|.$$

$$A_{n-1} = \frac{(\xi-x)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[f(z)^{n}\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}\right]$$

$$A_{n} = \frac{(\xi-x)^{n}}{n!}\frac{d^{n}}{dy^{n}}\left|f(z)^{n+1}\frac{d\,F\,(z)}{d\,y}\right|.$$

Nun gilt die Gleichung offenbar für jedes positive ganze n und auch noch für n = o, wenn wir unter dem Symbol (o) ! die Zahl 1 verstehen. Folglich ist:

$$-B_{n} = -\int_{0}^{\xi}A_{n-1}\,dx + \int_{0}^{\xi}A_{n}\,dx$$

$$-B_{n-1} = -\int_{0}^{\xi}A_{n-2}\,dx + \int_{0}^{\xi}A_{n-1}\,dx$$

$$-B_{n-2} = -\int_{0}^{\xi}A_{n-3}\,dx + \int_{0}^{\xi}A_{n-2}\,dx.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$-B_{2} = -\int_{0}^{\xi}A_{1}\,dx + \int_{0}^{\xi}A_{2}\,dx$$

$$-B_{1} = -\int_{0}^{\xi}A_{0}\,dy + \int_{0}^{\xi}A_{1}\,dx$$

Addiren wir alle diese Gleichungen und beachten, dass sich rechts alle Glieder aufheben mit Ausnahme von $\int_0^\xi A_0\,dx$ und $\int_0^\xi A_n\,dx$, so erhalten wir:

$$-B_n - B_{n-1} - B_{n-2} - \ldots\ldots - B_2 - B_1 = -\int_0^\xi A_0\,dx + \int_0^\xi A_n\,dx$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\xi A_0\,dx = \int_0^\xi f(z)\,\frac{dF(z)}{dy}\,dx$$

$$= \int_0^\xi f(z)\,F'(z)\,\frac{dz}{dy}\,dx = \int_0^\xi F'(z)\,\frac{dz}{dx}\,dx$$

und wenn wir jetzt als Integrationsvariable z einführen und bedenken, dass $z = y$ für $x = 0$ und $z = \zeta$ für $x = \xi$, so erhalten wir:

$$\int_0^\xi A_0\,dx = \int_y^\xi F'(z)\,dz = F(\zeta) - F(y)$$

Wir erhalten also, wenn wir für die B ihre Werthe einsetzen und $F(\zeta)$ auf die eine, alles Uebrige auf die andere Seite bringen:

$$F(\zeta) = F(y) + \xi\,f(y)\,F'(y) + \frac{\xi^2}{1.2}\,\frac{d}{dy}\left\{f(y)^2 F'(y)\right\} + \ldots\ldots + \frac{\xi^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left\{f(y)^n F'(y)\right\} + R$$

$$R = \frac{1}{n!}\int_0^\xi (\xi - x)^n\,\frac{d^n}{dy^n}\left\{f(y)^{n+1} F'(y)\right\}\,dx.$$